BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* **2007**

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ ЛИФТОВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ В РАССЛОЕНИИ КОНТРАВАРИАНТНЫХ ТЕНЗОРОВ ТИПА (2,0)

Г.Д.ФАТТАЕВ

Бакинский Государственный Университет

В работе рассматривается расслоение контравариантных тензоров типа (2,0), строится горизонтальный лифт аффинной связности из базового многообразия в тотальное пространство расслоения. В случае аффинной связности без кручения, при помощи горизонтального лифта строится полный лифт аффинной связности. Вычисляются ненулевые коэффициенты полного и горизонтального лифтов аффинной связности, доказываются теоремы о геодезических линиях лифтов аффинной связности без кручения.

1. На дифференцируемом многообразии M_n класса C^∞ рассмотрим расслоение $T_0^2(M_n)=\bigcup\limits_{Q\in M_n} T_0^2(Q)$ контравариантных тензоров типа $(2{,}0)$, где $T_0^2(Q)$ – пространство тензоров типа $(2{,}0)$ в точке $Q\in M_n$. Если (U, x^i) – карта на M_n, где U – окрестность точки из M_n, x^i – координатные функции, то картой расслоения $T_0^2(M_n)$ будет $(\pi^{-1}(U), x^i, t^{i_1 i_2})$, здесь $\pi: T_0^2(M_n)\to M_n$ - естественная проекция, $t^{i_1 i_2}$ – компоненты тензора t типа $(2{,}0)$ относительно натурального репера $\{\partial_i\}$, $i=\overline{1,n}$. Переход из одной координатной системы в другую на $T_0^2(M_n)$ осуществляется следующими преобразованиями:

$$\begin{cases} x^{i'} = x^{i'}\left(x^1,\ldots,x^n\right), \\ t^{i'_1 i'_2} = A^{i'_1}_{i_1} A^{i'_2}_{i_2} t^{i_1 i_2}, \end{cases} \tag{1}$$

здесь $x^{i'}=x^{i'}(x^i)$ – преобразования координат на M_n, $A^{i'}_i=\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$.

Для каждого тензорного поля t типа $(2{,}0)$ объект $\left(\underbrace{0,\ldots,0}_{n}, t^{i_1 i_2}\right)$ на $T_0^2(M_n)$ определяет вертикальное векторное поле. Это поле обозначим через ${}^V t$ и назовем вертикальным лифтом тензорного поля t в $T_0^2(M_n)$ (см. [1]).

В предположении, что на многообразии M_n задана аффинная связность ∇ с коэффициентами Γ_{ij}^k, горизонтальный лифт векторного поля $X \in X(M_n)$ в $T_0^2(M_n)$ имеет следующие компоненты:

$$^H X^i = X^i, \quad ^H X^{\bar{i}} = -\Gamma_{ms}^{i_1} t^{si_2} X^m - \Gamma_{ms}^{i_2} t^{i_1 s} X^m,$$

где $\bar{i} = \overline{n+1, n+n^2}$ (см. $[2]$).

Горизонтальный лифт $^H\nabla$ аффинной связности ∇ в $T_0^2(M_n)$ определяем по аналогии с работой $[3]$, следующим образом:

$$\begin{cases} ^H(\nabla_X Y) = {}^H\nabla_{^H X}{}^H Y, & ^V(\nabla_X A) = \nabla_{^H X}{}^V A, \\ ^H\nabla_{^V A}{}^H X = 0, & ^H\nabla_{^V A}{}^V B = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

где $X, Y \in X(M_n)$, $A, B -$ тензорные поля типа $(2,0)$, заданные на многообразии M_n.

Из соотношений (2) находим, что связность $^H\nabla$ имеет ненулевые коэффициенты в виде

$$\begin{cases} ^H\Gamma_{km}^i = \Gamma_{km}^i, \quad ^H\Gamma_{\bar{k}m}^{\bar{i}} = \Gamma_{mk_1}^{i_1}\delta_{k_2}^{i_2} + \Gamma_{mk_2}^{i_2}\delta_{k_1}^{i_1}, \\ ^H\Gamma_{k\bar{m}}^{\bar{i}} = \Gamma_{km_1}^{i_1}\delta_{m_2}^{i_2} + \Gamma_{km_2}^{i_2}\delta_{m_1}^{i_1}, \\ ^H\Gamma_{km}^{\bar{i}} = t^{li_2}\left(\partial_k\Gamma_{ml}^{i_1} - \Gamma_{km}^r\Gamma_{rl}^{i_1} + \Gamma_{kp}^{i_1}\Gamma_{ml}^p\right) + \\ + t^{i_1 l}\left(\partial_k\Gamma_{ml}^{i_2} - \Gamma_{km}^r\Gamma_{rl}^{i_2} + \Gamma_{kp}^{i_2}\Gamma_{ml}^p\right) + \\ + t^{pl}\left(\Gamma_{kp}^{i_1}\Gamma_{ml}^{i_2} + \Gamma_{kl}^{i_2}\Gamma_{mp}^{i_1}\right), \end{cases} \qquad (3)$$

где δ_j^i – символ Кронекера.

2. Предположим, что связность ∇ без кручения, т.е. $S = 0$, или $\Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k$. На тензорном расслоении $T_0^2(M_n)$ рассмотрим аффинную связность $\overset{1}{\nabla}$, определяемую следующим образом:

$$\overset{1}{\Gamma}{}_{KM}^I = {}^H\Gamma_{KM}^I - T_{KM}^I,$$

причем тензор аффинной деформации- T_{KM}^I имеет единственную серию ненулевых компонентов в виде

$$T_{km}^{\bar{i}} = -t^{li_2}R_{lkm}^{i_1} - t^{i_1 l}R_{lkm}^{i_2}, \qquad (4)$$

здесь R_{lkm}^i – компоненты тензора кривизны аффинной связности $\nabla, I, K, M = \overline{1, n+n^2}$.

Пользуясь (3) и (4), находим ненулевые коэффициенты аффинной связности $\overset{1}{\nabla}$:

$$\begin{cases} \overset{1}{\Gamma}{}^{i}_{km} = \Gamma^{i}_{km}, \qquad \overset{1}{\Gamma}{}^{\bar i}_{\bar k m} = \Gamma^{i_1}_{mk_1}\delta^{i_2}_{k_2} + \Gamma^{i_2}_{mk_2}\delta^{i_1}_{k_1}, \\ \overset{1}{\Gamma}{}^{\bar i}_{k\bar m} = \Gamma^{i_1}_{km_1}\delta^{i_2}_{m_2} + \Gamma^{i_2}_{km_2}\delta^{i_1}_{m_1}, \\ \overset{1}{\Gamma}{}^{\bar i}_{km} = t^{li_2}\partial_l\Gamma^{i_1}_{km} + t^{i_1 l}\partial_l\Gamma^{i_2}_{km} + t^{pl}\left(\Gamma^{i_1}_{kp}\Gamma^{i_2}_{ml} + \Gamma^{i_2}_{kl}\Gamma^{i_1}_{mp}\right). \end{cases} \tag{5}$$

В работе $[4]$ установлено, что полный лифт векторного поля $X \in \mathcal{X}(M_n)$ в $T^2_0(M_n)$ имеет следующие компоненты:

$$^{C}X^{i} = X^{i}, \qquad ^{C}X^{\bar i} = t^{mi_2}\partial_m X^{i_1} + t^{i_1 m}\partial_m X^{i_2}. \tag{6}$$

Имеет место

<u>*Теорема 1*</u>*. Для векторных полей $X, Y \in \mathcal{X}(M_n)$ и связности ∇ без кручения, справедливо соотношение*

$$^{C}(\nabla_X Y) = \overset{1}{\nabla}_{^C X}{}^{C}Y - \overset{1}{T}, \tag{7}$$

где $\overset{1}{T}$ – вертикальное векторное поле на $T^2_0(M_n)$ с ненулевыми компонентами

$$\overset{1}{T}{}^{\bar i} = t^{pl}\left(\nabla_p X^{i_1}\nabla_l Y^{i_2} + \nabla_p Y^{i_1}\nabla_l X^{i_2}\right).$$

<u>*Доказательство*</u> . Рассмотрим возможные случаи:

1) $I = i$, при этом пользуясь (5) и (6) получим:

$$\left(\overset{1}{\nabla}_{^C X}{}^{C}Y\right)^{i} = {}^{C}X^{K}(\partial_K Y^{i} + \overset{1}{\Gamma}{}^{i}_{KM}{}^{C}Y^{M}) = X^{k}\left(\partial_k Y^{i} + \Gamma^{i}_{km}Y^{m}\right) =$$
$$= (\nabla_X Y)^{i} = {}^{C}(\nabla_X Y)^{i},$$

т.е. векторное поле $\overset{1}{T}$ является вертикальным;

2) $I = \bar i$, при этом после соответствующих вычислений и выкладок будем иметь следующее:

$$\left(\overset{1}{\nabla}_{^C X}{}^{C}Y\right)^{\bar i} = {}^{C}(\nabla_X Y)^{\bar i} + t^{pl}\left(\nabla_p X^{i_1}\nabla_l Y^{i_2} + \nabla_p Y^{i_1}\nabla_l X^{i_2}\right),$$

откуда доказательство теоремы оказывается очевидным.

В работе $[5]$ показано, что полный лифт аффинной связности без кручения в $^{C}T(M_n)$(касательное расслоение) удовлетворяет соотношению, аналогичному (7). Опираясь на этом факте, аффинную связность $\overset{1}{\nabla}$, удовлетворяющую условию (7), назовем полным лифтом связности ∇ без кручения в тензорное расслоение $T^2_0(M_n)$ и обозначим через $^{C}\nabla$.

3. На тензорном расслоении $T^2_0(M_n)$ рассмотрим произвольную кривую $\tilde{C} : (0;1) \to T^2_0(M_n)$. Тогда для $\forall \tau \in (0;1)$ имеем:

$\widetilde{C}(\tau)=\left(x^i(\tau),t^{i_1i_2}(\tau)\right)\stackrel{def}{=}\left(C(\tau),t^{i_1i_2}(\tau)\right).$

Предположим, что кривая $\widetilde{C}(\tau)$ есть геодезическая линия аффинной связности ${}^C\nabla$, следовательно, эта кривая задается уравнением:

$$\frac{d^2x^I}{d\tau^2}+{}^C\Gamma^I_{KM}\frac{dx^K}{d\tau}\frac{dx^M}{d\tau},\qquad I,K,M=1,2,\ldots,n+n^2. \tag{8}$$

Записывая в (8) выражение ${}^C\Gamma^I_{KM}$ из (5), получим:

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2}+\Gamma^i_{km}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^m}{d\tau}=0\text{, при } I=i,$$

$$\begin{aligned}&\frac{d^2t^{i_1i_2}}{d\tau^2}+\left(t^{li_2}\partial_l\Gamma^{i_1}_{km}+t^{i_1l}\partial_l\Gamma^{i_2}_{km}+t^{pl}\left(\Gamma^{i_1}_{kp}\Gamma^{i_2}_{ml}+\right.\right.\\&\left.\left.+\Gamma^{i_2}_{kl}\Gamma^{i_1}_{mp}\right)\right)\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^m}{d\tau}+2\Gamma^{i_1}_{km}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dt^{mi_2}}{d\tau}+\qquad\text{при } I=\bar{i}\,.\\&+2\Gamma^{i_2}_{km}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dt^{i_1m}}{d\tau}=0,\end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим ковариантное дифференцирование тензорного поля $t^{i_1i_2}(\tau)$ по τ:

$$\frac{\delta}{d\tau}\left(t^{i_1i_2}(\tau)\right)=\frac{d}{d\tau}\left(t^{i_1i_2}\right)+\Gamma^{i_1}_{ml}t^{li_2}\frac{dx^m}{d\tau}+\Gamma^{i_2}_{ml}t^{i_1l}\frac{dx^m}{d\tau}\,. \tag{10}$$

Ковариантно дифференцируя (10) по τ, после соответствующих выкладок, получим:

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{d\tau}\left(\frac{\delta}{d\tau}\left(t^{i_1i_2}\right)\right)&=\frac{d^2t^{i_1i_2}}{d\tau^2}+\left(\left(\partial_k\Gamma^{i_2}_{ml}+\Gamma^{i_2}_{ka}\Gamma^a_{ml}-\right.\right.\\&\left.-\Gamma^{i_2}_{al}\Gamma^a_{km}\right)t^{i_1l}+\left(\partial_k\Gamma^{i_1}_{ml}+\Gamma^{i_1}_{ka}\Gamma^a_{ml}-\Gamma^{i_1}_{al}\Gamma^a_{km}\right)t^{li_2}+\\&\left.+\left(\Gamma^{i_1}_{ka}\Gamma^{i_2}_{ml}+\Gamma^{i_2}_{kl}\Gamma^{i_1}_{ma}\right)t^{al}\right)\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^m}{d\tau}+2\Gamma^{i_1}_{km}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dt^{mi_2}}{d\tau}+\\&+2\Gamma^{i_2}_{km}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dt^{i_1m}}{d\tau}.\end{aligned} \tag{11}$$

При помощи выражения (11), второе из уравнений (9) запишем в виде

$$\frac{\delta}{d\tau}\left(\frac{\delta}{d\tau}\left(t^{i_1i_2}\right)\right)-R^{i_2}_{kml}t^{i_1l}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^m}{d\tau}-R^{i_1}_{kml}t^{li_2}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^m}{d\tau}=0\,. \tag{12}$$

Таким образом, приходим к следующему результату:

<u>*Теорема 2*</u>. *Пусть ∇ – аффинная связность без кручения на дифференцируемом многообразии M_n, а $\widetilde{C}(\tau)=\left(C(\tau),t^{i_1i_2}(\tau)\right)$ – кривая на расслоении $T^2_0(M_n)$. Для того, чтобы кривая $\widetilde{C}(\tau)$ была геодезической линией связности ${}^C\nabla$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

а) кривая $C(\tau)$ есть геодезическая линия связности ∇;

б) тензорное поле $t^{i_1 i_2}$ *удовлетворяет соотношению (12) вдоль кривой* $C(\tau)$.

Заметим, что аналог теоремы 2 в случае аффинорного расслоения получен в работе $[3]$.

Пусть кривая $\widetilde{C}(\tau)$ является геодезической линией аффинной связности ${}^H\nabla$. Тогда кривая $\widetilde{C}(\tau)$ задается уравнением:

$$\frac{d^2 x^I}{d\tau^2} + {}^H\Gamma^I_{KM} \frac{dx^K}{d\tau}\frac{dx^M}{d\tau} = 0, \quad I, K, M = 1, 2, \dots, n + n^2. \tag{13}$$

Учитывая выражения (5) ненулевых коэффициентов аффинной связности ${}^H\nabla$, из уравнения (13) получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{km}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^m}{d\tau} = 0, \text{ при } I = i,\\
&\frac{d^2 t^{i_1 i_2}}{d\tau^2} + \Big(\big(\partial_k \Gamma^{i_2}_{ml} + \Gamma^{i_2}_{ka}\Gamma^a_{ml} - \Gamma^{i_2}_{al}\Gamma^a_{km}\big)t^{i_1 l} + \\
&\quad + \big(\partial_k \Gamma^{i_1}_{ml} + \Gamma^{i_1}_{ka}\Gamma^a_{ml} - \Gamma^{i_1}_{al}\Gamma^a_{km}\big)t^{l i_2} + \\
&\quad + \big(\Gamma^{i_1}_{ka}\Gamma^{i_2}_{ml} + \Gamma^{i_2}_{kl}\Gamma^{i_1}_{ma}\big)t^{al}\Big)\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^m}{d\tau} + 2\Gamma^{i_1}_{km}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dt^{m i_2}}{d\tau} + \text{ при } I = \bar{i}.\\
&\quad + 2\Gamma^{i_2}_{km}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dt^{i_1 m}}{d\tau} = 0,
\end{aligned} \tag{14}$$

Пользуясь ковариантным дифференцированием (11), второе из уравнений (14) приведем к форме:

$$\frac{\delta}{d\tau}\left(\frac{\delta}{d\tau}\left(t^{i_1 i_2}\right)\right) = 0, \tag{15}$$

тем самым справедливость следующей теоремы установлена:

<u>*Теорема 3*</u>. *Пусть* ∇ *– аффинная связность без кручения на дифференцируемом многообразии* M_n, *а* $\widetilde{C}(\tau) = \left(C(\tau), t^{i_1 i_2}(\tau)\right)$ *– кривая на расслоении* $T^2_0(M_n)$. *Для того, чтобы кривая* $\widetilde{C}(\tau)$ *была геодезической линией связности* ${}^H\nabla$, *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

а) кривая $C(\tau)$ *есть геодезическая линия связности* ∇;

б) тензорное поле $t^{i_1 i_2}$ *удовлетворяет соотношению (14) вдоль кривой* $C(\tau)$.

Аналог теоремы 3 в случае расслоения линейных реперов получен Дж. Кюреком в работе $[6]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ledger A.I., Yano K. Almost complex structures on tensor bundles. J. Diff. Geom., 1967, N 1, p. 355-368.
2. Салимов А.А., Фаттаев Г.Д. Обобщенный оператор Яно-Ако и новый метод о лифтах тензорных полей// Сб. докл. межд. научн.-техн. конф. «Актуальные

пробл. фунд. наук». Том 2.-Москва, 1991, с.63-65.
3. Фаттаев Г.Д. Полный лифт аффинной связности в чистое аффинорное подрасслоение.-Б.-1992.-13 с.-Деп. в АзНИИНТИ 11.11.92. N 1904-Аз.92.
4. Салимов А.А., Фаттаев Г.Д. Полный лифт векторного поля в чистое тензорное подрасслоение.-Б., 1990.-18 с.-Деп. в АзНИИНТИ 07.05.90. N 1489-Аз. 90.
5. Sato I. Complete lifts from a manifold to its cotangent bundle// Kodai Math. Sem. Rep.-1967.-v.20, p.458-468.
6. J.Kurek. On a horizontal lift of a linear connection to the bundle of linear frames //Annales Univ. Mariae Curie-Sklodowska.-1987.- vol.XLI.-sectio A, p.31-38.

(2,0) TİPLİ KONTRAVARİANT TENZORLARIN LAYLANMASINDA AFİN RABİTƏNİN LİFTLƏRİNİN GEODEZİK XƏTLƏRİ

H.D.FƏTTAYEV

XÜLASƏ

İşdə (2,0) tipli kontravariant tenzorların laylanmasına baxılır, afin rabitənin baza çoxobrazlısından laylanmanın total fəzasına horizontal lifti qurulur. Buruqsuz afin rabitə halında horizontal liftin köməyilə afin rabitənin tam lifti qurulur. Afin rabitənin tam və horizontal liftlərinin sıfırdan fərqli əmsalları hesablanır, buruqsuz afin rabitənin geodezik xətlərinə dair teoremlər isbat olunur.

THE GEODESIC LINES OF THE LIFTS OF THE AFFINE CONNECTION IN THE BUNDLE OF CONTRAVARIANT TENSORS OF THE TYPE (2,0)

H.D.FATTAYEV

SUMMARY

In this article the bundle of contravariant tensors of the type (2,0) is considered, the horizontal lift of the affine connection from the base manifold to the total spase of bundle is established. In a case of the nontorsion affine connection by assistance of the horizontal lift the complete lift of the affine connection is established. The nonzero coefficients of complete and horizontal lifts of the affine connection are calculated, the theorems on geodesic lines of the lifts of the nontorsion affine connection are proved.